The findings are unanimous in the financial world: the tools that measure the performance of portfolios used until now, no longer suffice.

The most used, the Sharpe ratio is the first target, its risk measure is often inadequate for calculating returns of hedge funds, the problems posed by the the underestimation of the risks, can not be overlooked.

Unlike conventional funds invested in shares or bonds, it is relatively difficult to control hedge funds and identify the underlying risks.

diversification was considered by the financial as the only real protection, but the specific management of hedge funds gives them an asymmetry in Monthly returns and a correlation with the market increasing with diversification.

These investments were previously restricted to professional customers, allowing the types of management with high leverage and impact in the short term.
But the number of rich private investors betting on these new Investments, has quickly given an essential role to the hedge funds management, reaching trillion euros of assets spread over thousands of funds.

Just when hedge funds are treated as an full Asset class, risk management becomes a science .

However the Sharpe ratio and Value-at-risk, recognized by everyone: front-office, managers, bankers.., do not meet the criteria as measure of risk.
We find the gap between the academic progress and financial practices.

Recognizing the possible increase in the Sharpe ratio by selling options, it necessary to find a measure taking into account the aversion to negative asymmetry coefficients (skewness <0)

The wide fluctuations in stock prices in recent years have also led the financial community to pay greater attention to measurement of risk.

The study of distributions of returns and the probability of extremes results are the subject of many studies by all categories of financial : mathematicians, econometers, statisticians, economists, and traders with the aim of maximizing returns , being even more difficult to achieve in the face of declining.

The collective investments and managers already rely on tools such as computers, but also math, sophisticated asset allocation, and it is important to find a way of benchmarking performances.

After a presentation of the problem, and major conventional techniques, this study presents some of the latest developments in the field of research Currently growing, and compares them.

# Les mesures de performances en gestion alternative

**Patrice KOCH**

DEA MMME
Université Paris I – ENSTA -ENPC
Maison des sciences économiques
Cermsem
106-112 Bd de l'Hopital
75013 Paris

Mémoire soutenu le 15/09/2004

**Responsable :**
J-M Bonnisseau Professeur de Mathématiques

**Maitre de stage :**
Isabelle Nagot
Professeur de calcul stochastique

# Introduction :

Le constat est unanime dans le monde financier : les outils de mesure des performances des portefeuilles utilisés jusqu'à aujourd'hui ne suffisent plus.

Le plus utilisé, le ratio de Sharpe est le premier visé, sa mesure du risque étant souvent inadéquate pour les calcul de rendements des hedge funds, les problèmes posés par les distributions non gaussiennes et la sous-estimation des risques ne peuvent être négligées .

Contrairement à des fonds classiques, investis sur des actions ou des obligations, il est relativement compliqué de contrôler les fonds en gestion alternative et d'identifier les risques sous-jacents.

La diversification était considérée par les financiers comme la seule vraie protection, mais la gestion spécifique des hedge funds leur donne une asymétrie de rendements mensuels ainsi qu'une corrélation avec le marché augmentant avec la diversification .

Ces véhicules d'investissements étaient jusqu'ici réservés à une clientèle restreinte de professionnels, permettant des types de gestion à forts effets de leviers et à court terme . Mais le nombre de riches investisseurs privés misant sur ces nouveaux placements a rapidement donné une dimension incontournable à la gestion alternative atteignant le trillion d'euros d'actifs répartis sur des milliers de fonds .

C'est ainsi qu' au moment même où les hedge funds sont traités comme une classe d'actifs à part entière, la gestion des risques devient elle, une science *per se* .

Le ratio de Sharpe et la Value-at-risk pourtant reconnus par tous les praticiens, directeurs de salles de marchés, banquiers, gérants, ne répondent pas aux critères de cohérence en tant que mesures de risque[1].
On s'aperçoit alors du fossé existant entre les progrès théoriques et les pratiques financières.

---

[1] Artzner P. , Delbaen F. ,Eber J.M. , Heath D. - 1999 - " Coherent measures of risk" Mathematical Finance 9/3 p. 203-228

Comme le souligne Hilary Till (fondatrice de Premia Capital Management à Chicago)[1], constatant l' accroîssement possible du ratio de Sharpe par des ventes d'options, il faut une mesure d'évaluation des investissement tenant compte de l'aversion pour les coefficients d'asymétrie négatifs ( skewness < 0 ) .

Les amples fluctuations des cours boursiers observées ces dernières années ont également conduit la communauté financière à porter une attention accrue aux instruments de mesure du risque.

L'étude du degré de symétrie des distributions de rendements et de la probabilité de résultats extrêmes font l'objet de nombreuses études menées par toutes les catégories de financiers : mathématiciens, économètres statisticiens, économistes de l'incertain, et traders dont l'objectif de maximisation des rendements est d'autant plus difficile à atteindre dans un contexte de baisse .

Les organismes de placement collectifs et les gérants s'appuient déjà sur des outils informatiques, mais aussi mathématiques, d'allocation d'actifs sophistiqués, il importe de trouver un moyen d'évaluation des performances faisant référence .

Après avoir fait un exposé du problème, et des principales techniques classiques, cette étude présente quelques-unes des dernières innovations dans ce domaine de recherche actuellement en pleine croissance, et les compare.

---

[1] Returns-based analyses of hedge funds - 29/07/02 - Derivative weeks: Newsletter's learning curve section

# Chapitre I : Position du problème

## Section I : Les mesures classiques

Depuis les travaux de Daniel Bernouilli (XVIIIème) formalisés par Neumann et Morgenstern (1944), la modélisation du comportement d'un décideur confronté à un risque a postulé l'existence d'une fonction d'utilité U reflètant les relations de préferences:
Un agent économique rationnel souhaite obtenir plus grande rentabilité pour un niveau de risque donné ou prendre le moins de risques pour une espérance de rendement donnée.

### I Fonctions d'utilité :

Les propriétés mathématiques de U sont importantes pour pouvoir évaluer les distributions associées aux investissements alternatifs.

Il est raisonnable [1] de restreindre ces fonctions à celles telles que :

$\rightarrow U' > 0$ la croissance stricte de l'utilité U supposant l'insatiabilité de l'individu.

$\rightarrow U'' < 0$ la décroissance stricte de l'utilité marginale avec la richesse représentant l'aversion au risque [2] .

$\rightarrow U''' > 0$ Cette condition s'interprète fréquemment comme une préfèrence pour la skewness ( positive ); pour 2 actifs ayant moyenne et variance identiques, l'individu choisira la skewness la plus forte [3].

$\rightarrow U'''' < 0$ Correspond à l'aversion pour l'applatissement de la distribution pouvant apporter des pertes extrêmes.

---

[1] Pratt John W. -1964- Risk aversion in the small and in the large - Econometrica
Arrow K. -1971- Essays in the theory of risk-bearing - Markham publishing Co

[2] Booth James R. et Smith Richard L. -1987- An examination of the small-firm effect on the basis of skewness preference - The journal of financial research

[3] Scott Robert C. et Horvath Philip A. - 1980 - On the direction of preference for moments of higher order than the variance - The journal of finance

Ces fonctions d'utilités contiennent celles que l'on utilise le plus souvent en économie et en finance [1] .

Pourtant, il n'y a pas une correspondance systématique dans les préférences des décideurs entre l'espérance d'utilité et le choix des moments des distributions .

Cependant on peut toujours avoir $R_1$ et $R_2$ de mêmes moyenne $\mu$ et variance $\sigma^2$ , avec $E(R_1 - \mu)^3 > E(R_2 - \mu)^3$ et $E\,U(R_1) < E\,U(R_2)$ comme préférence du décideur [2]

L'aversion au risque n'entraine pas forcément de choisir la plus petite variance à moyennes égales ou la plus grande skewness si la moyenne et la variance des portefeuilles sont identiques.

Certains auteurs [3] tentent d'isoler l'effet de la variance ou de la skewness en écrivant par exemple: « $\mu_3(R_1) > \mu_3(R_2)$ *Ceteris paribus* » , mais ce n'est pas suffisant pour déterminer le choix d'un investisseur .

Pour faire un lien entre les préférences d'utilité et les préférences de moments, les résultats passés peuvent être analysés empiriquement en association avec les valeurs de la variance et de la moyenne, ce qui repose sur des théories assez faibles.

Ou bien supposer un choix rationnel maximisant la fonction d'utilité d'après la moyenne et la variance, si les rendements ont une distribution normale.

### II Les moments de la fontions d'utilité :

On fait couramment l'hypothèse que U (X) est polynomiale, les dérivées étant égales à zéro pour les ordres élevés, son développement de Taylor est tronqué au $4^{ème}$ terme.
Ce qui donne pour une richesse aléatoire W en fin de période :

$$U(W) = U[E(W)] + \sum_{k=1,4} \frac{1}{k!} . U^{(k)} . E(W).(W - E(W))^k$$

Il s'agit d'optimiser : $\text{Max}_w\, E[U(W)]$

Avec : $E[U'(E(W)).(W-E(W))] = U'(E(W)).E[W-E(W)] = 0$

$$E[U(W)] \cong U[E(W)] + U''(E(W)).\sigma^2/2 + U'''(E(W)).s^3/6 + U''''(E(W)).k^4/4!$$

---

[1] Brockett Patrick L. et Golden Linda L. -1987- A class of utility functions containing all the common utility functions - Management Science

[2] Brockett Patrick L et Garven James R. -1998 - A reexamination of the relationship between preferences and moment ordering by rational risk averse investors - Geneva papers on risk and insurance theory

3 - Scott Robert C. et Horvath Philip A. - 1980

Les moments que l'on met de côté, peuvent cependant avoir un poids plus important que ceux que l'on garde pour définir la distribution, et la série de Taylor ne converge pas nécessairement vers E [U(W)] .

Remarque : l'investissement initial étant égal à 1, les moments de la richesse de fin de période sont identiques à ceux des rendements, ce qui permet de simplifier l'analyse des distributions de rendements.

### III Modèlisation des préférences :

Rappels :

Skewness : Coefficient de dissymétrie de Fisher :

$s = \sqrt[3]{E(X-\mu)^3}$ $\qquad \xi_3 = \dfrac{E[X-\mu]^3}{\sigma^3}$

Si la distribution est décalée à droite on a $\xi_3 > 0$

kurtosis : Coefficient d'applatissement de Fisher :

$k = \sqrt[4]{E(X-\mu)^4}$ $\qquad \xi_4 = \dfrac{E[X-\mu]^4}{\sigma^4} - 3$

On écrit la relation de préférence sous la forme suivante :

$\Phi\,[E(W), \sigma(W), s(W), k(W)] = U(E(W)) + \tau\ \sigma^2(W) + \kappa\, s^3(W) + \delta\, k^4(W)$

Les paramètres $\tau < 0$, $\kappa > 0$ , $\delta < 0$ étant les dérivées de la fonction d'utilité au point E(W), et elles définissent le domaine des préférences pour la moyenne, la variance et la kurtosis. Elles sont identiques aux taux marginaux de substitution entre les moments ;
Si l'espérance de rendement est fixe, la valeur de la fonction de préférence est alors une combinaison linéaire des moments d'ordres supérieurs.

Cette dernière équation peut être utilisée pour développer une mesure du risque utilisant les 4 premiers moments de la distribution de rendement du portefeuille afin de prendre en compte la non-normalité. [1]

[1] Berenyi Z. -2002 - measuring hedge fund risk with multi-moment risk measure - working paper

La fontion de préférence peut alors être écrite :

$\Phi$ [E(W) , $\sigma$(W), s(W), k(W)] = U (E(W)) - R [$\sigma$(W), s(W), k(W)]
en séparant la composante représentant le risque R .La mesure du risque est :

$$R\ [\sigma(W), s(W), k(W)] = -\ [\tau\sigma^2(W) + \kappa s^3(W) + \delta\ k^4(W)] = -\ \tau[\sigma^2(W) + \frac{\kappa s^3(W)}{\tau} + \frac{\delta\ k^4(W)}{\tau}]$$

$$= -\ \tau\ .\ (\text{variance-équivalent})$$

Cela montre comment la variance ( par exemple ) doit bouger pour compenser une augmentation d'une unité de la skewness, ceteris paribus.

### IV La non-normalité :

La série de Taylor de l'espérance d'utilité donne donc des renseignements à condition qu'elle converge, la forme de la distribution de rendements est donc essentielle comme la fonction d'utilité de l'investisseur. Plus la distribution est compacte, moins les termes du développement de Taylor vont être suffisants [1] .

L'intervention de la skewness et la kurtsosis va détériorer l'approximation à partir d'une fonction d'utilité arbitraire. L'approximation peut, par exemple, être meilleure pour des distributions avec un faible skewness et un grand kurtosis. Cela justifie d'inclure les 3 ème et 4ème moment dans l'évaluation des performances en faisant attention et testant les propriétés empiriques des mesures de performances.

Par exemple, des distributions de type hyperbolique étant utilisées pour modéliser les rendements des fonds « equity hedge », il faut donc trouver d'autres techniques.

On peut aussi évaluer la déformation de la distribution en comparaison à la loi normale, grâce au test de Jarque-Bera [2] donné par la formule :

$$JB = \frac{N - k}{6} . \left[\ \xi_3^2 + 1/4\ .\ (\ \xi_4 - 3\ )^2\ \right]$$

Il permet d'estimer l'asymétrie quand le pic de probabilité d'occurrence ne correspond pas à la moyenne empirique, et la différence de kurtosis par rapport à 3 (loi normale).

---

[1] Wu L. -1998- Investing in the emerging markets: effects of higher moments and predictability - technical report , Stern school of business ,NY
Samuelson P. -1970- The fundamental approximation theorem on portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments - Review of economic studies

[2] Bera et Jarque (1981) - An efficient large-sample test for normality of observations and regression residuals

## Section II L'approche moyenne-variance de Markowitz :

Les fondements du modèle d'équilibre des actifs financiers à l'origine des premiers modèles d'analyse de performance appartiennent à Markowitz [1].
Il est le premier à avoir quantifié le lien entre le risque et le rendement, donnant naissance à la théorie moderne de gestion des portefeuilles obtenant le prix Nobel avec Sharpe et Miller en 90.
Cette théorie de choix de portefeuilles en avenir incertain, s'appuie sur la maximisation de l'utilité de la richesse finale de l'investisseur.
De façon générale, l'utilité espérée est : $E[U(W)] = \sum_i p_i U(w_i)$
$p_i$ étant la probabilité d'obtenir la richesse $w_i$

La prime de risque correspondant au montant maximum que l'individu est prêt à abandonner pour éliminer l'incertitude. Markowitz la définit par [2] :

$E[U(W)] - U[E(W)]$ ( > 0 et U concave, si aversion au risque )

La théorie développée par Markowitz est donc fondée sur la maximisation de l'utilité de la richesse finale de l'investisseur. Cette fonction d'utilité se définit en fonction de l'espérance de rendement et de l'écart-type de sa richesse . Cette théorie a permis de proposer une solution
au problème de choix de portefeuilles d'un investisseur averse au risque : les portefeuilles optimaux, du point de vue de l'investisseur rationnel, sont définis comme les portefeuilles de plus faible risque pour une rentabilité donnée.
Ces **portefeuilles** sont dits efficients au sens moyenne-variance.

Les formes usuelles des fonctions U sont :

### I Formes usuelles des fonctions d'utilités U :

### A Fonctions quadratiques :

$E[U(W)] = V(E(Z), \sigma_z^2)$ , Z étant le taux de rentabilité aléatoire du portefeuille,

Avec $U(W) = aW - bW^2$ ( $b > 0$ fonction d'utilité quadratique concave )

$\Rightarrow \quad \delta V / \delta \sigma_z^2 < 0 \quad \Rightarrow$ aversion pour la variance.

$\Rightarrow \quad \delta V / \delta E(Z) > 0$ ( si $W < a/2b$ ) $\Rightarrow$ préférence pour la moyenne

Mais elles ne fonctionnent que pour un niveau de richesse limité et de plus $U'' < 0$, aversion absolue ( $ARA = - U''/U'$ ) au risque croissante avec la richesse , ce qui ne reflète pas les comportements réels.

[1] Markowitz H. - Portfolio selection - Journal of finance Mars 1952
[2] Markowitz H. - Portfolio selection: Efficient diversificatiopn of investments - 1959

**B Distributions normales :**

Si les actifs constituant le portefeuille ont des distributions normales de rendements, avec des fonctions d'utilité non quadratiques,
il est clair que seuls les 2 premiers moments jouent un rôle :

$W_0$ : richesse initiale , $W = W_0(1 + Z) = W_0(1 + E(Z) + (Z\text{-}E(Z))$

donc,

$$V(E(Z), \sigma_z^2) = E[U(W)] = E[U(W_0(1 + Z))]$$
$$= E\left[U\left(W_0(1 + E(Z) + z.\sigma(Z)\right)\right], \text{ avec } z : N\ (0,1)$$

U étant strictement croissante , on en déduit également que:

$$\frac{\delta V}{\delta E(Z)} = E[W_0.U'(W)] > 0 \text{ et ,}$$

$$\delta V / \delta\sigma_z^2 = \frac{d\sigma_Z}{d\sigma_Z{}^2} \cdot \frac{\delta V}{\delta\sigma_Z} = \frac{1}{2\sigma_Z} E[zW_0.U'(W)] = (1/2\sigma_z).W_0.E[z\,U'(W)]$$

Or $\text{Cov}(z\,U'(W)) = E(z\,U'(W)) - E(z)E(U'(W)) = E(z\,U'(W))$

et comme $W = W_0(1 + E(Z) + z.\sigma(Z))$,

U'(W) et Z sont négativement correlées

(On utilise la concavité : U''<0 la fonction d'utilité marginale est strictement décroissante)

$\Rightarrow \delta V / \delta\sigma_z^2 < 0$

On peut obtenir la pente des courbes d'indifférence d'un individu, ( couples risque-rendement donnant la même utilité ) en faisant $E[U(W)] = V(\sigma_z^2, E(Z)) = 0$

où $E(Z)$ est alors une fonction implicite de $\sigma_z^2$ .

$$\Rightarrow \frac{d(E(Z))}{d(\sigma_z^2)} = -\frac{V'_{\sigma z^2}(\sigma_z^2, E(Z))}{V'_{E(Z)}(\sigma_z^2, E(Z))}$$

Cette quantité positive représentant la taux marginal de substitution entre l'espérance et la variance indique que l'individu compense l'augmentation des risques par une moyenne de rendements plus élevée afin de conserver son utilité.

## II Formulation du modèle de Markowitz :

### A Présentation

La contribution marginale d'un titre à la variance du rendement d'un portefeuille est la covariance du rendement de ce titre avec celui du portefeuille.

(1) $E(R_p) = \sum_i x_i E(R_i)$ espérance de rendement du portefeuille

(2) $\sum_i x_i = 1 \quad (i = 1, ..., n)$

(3) $\sigma^2(R_p) = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$ variance

$R_i$ est le taux de rentabilité aléatoire du titre i
$x_i$ : proportion de l'actif i dans le portefeuille p
$\sigma_{ij} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))] = \mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ji}$

La matrice de variance-covariance des rendements est alors carrée et symétrique.

Donc: $$\frac{\delta \sigma^2(R_p)}{\delta x_i} = 2 \sum_j x_j \sigma_{ij} = 2 \mathrm{cov}(R_i, \sum_j x_j R_j) = 2 \mathrm{cov}(R_i, R_p)$$

Le risque d'un portefeuille est inférieur à la moyenne des risques de chacun des actifs, considérés individuellement , mettant en évidence quantitativement l'apport de la diversification.
La frontière de Markowitz ou efficiente , décrit les portefeuilles qui ont la variance minimale pour une espérance de rentabilité donnée.

### B résolution du problème de Markowitz ( Merton 1972 ):

Les conditions précédentes sont complétées par l'absence de contraintes sur les volumes de titres, et ceux-ci étant indépendants afin d'assurer l'inversibilité de la matrice $\Omega$ de variance-covariance . $\Omega^{-1} = (\nu_{ij})$

Il s'agit alors d'un problème d'optimisation: $\min_{x_i} \sigma^2(R_p)$

On définit le Lagrangien avec les multiplicateurs des contraintes (1),(2), $\gamma$ et $\mu$ :

$$L = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} + \gamma(E(R_p) - \sum_i x_i E(R_i)) + \mu(1 - \sum_i x_i)$$

$$\min_{x_i \gamma \mu} L \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta L}{\delta \gamma} = \frac{\delta L}{\delta \mu} = 0$$

Le portefeuille ($x_i$) est alors déterminé de manière unique par la résolution de ce système de n+2 équations à n+2 inconnues que constituent ces conditions d'optimalité.
Il est à noter qu'aucune restriction n'étant faite sur les $x_i$, les solutions peuvent comporter des proportions d'actifs négatives, ce qui correspond donc aux ventes à découvert.

On a : $\sum_j x_j \ \sigma_{ij} - \gamma \ E(R_i) - \mu = 0$ (a)

$E(R_p) - \sum_i x_i E(R_i) = 0$ (b)

$1 - \sum_i x_i = 0$ (c)

d'où :

$$x_k = \gamma \sum_j \nu_{kj} \ E(R_j) + \mu \sum_j \nu_{kj} \qquad k = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_k x_k E(R_k) = \gamma \sum_k \sum_j \nu_{kj} \ E(R_j) \ E(R_k) + \mu \sum_k \sum_j \nu_{kj} \ E(R_k) \qquad \text{(d)}$$

$$\text{et} \quad \sum_k x_k = \gamma \sum_k \sum_j \nu_{kj} \ E(R_j) + \mu \sum_k \sum_j \nu_{kj} \qquad \text{(e)}$$

On pose : $A = \sum_k \sum_j \nu_{kj} \ E(R_j)$

$B = \sum_k \sum_j \nu_{kj} \ E(R_j) \ E(R_k)$

$C = \sum_k \sum_j \nu_{kj}$

et (b), (c),(d),(e) $\Rightarrow E(R_p) = A\mu + B\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = (C.\ E(R_p) - A) / (BC-A^2)$

$1 = A\gamma + B\mu \qquad \mu = (B - A.\ E(R_p)) / (BC-A^2)$

Donc: $$x_k = \frac{E(R_p)}{BC-A^2} \ . \sum_j \nu_{kj} (C.\ E(R_j) - A) + \sum_j \nu_{kj} (B - A.\ E(R_j)) \qquad k = 1,\dots,n$$

On caractérise ainsi tous les portefeuilles de la frontière efficiente, dont l'équation dans la plan moyenne-variance est :

(a) $\Rightarrow \sum_i \sum_j x_i x_j \ \sigma_{ij} = \gamma \sum_i x_i E(R_i) + \mu \sum_i x_i$

Soit : $\sigma^2_p = \gamma E(R_p) + \mu = \dfrac{C.\ E^2(R_p) - 2A\ E(R_p) + B}{BC-A^2}$

On obtient l'équation d'une parabole
Cette parabole admet comme extremum le portefeuille de variance minimum défini par:

$\dfrac{d\sigma^2_p}{d\,E(R_p)} = 0 \quad \Rightarrow$ son taux de rentabilité est $E(R_{p\,min}) = A/C$
et sa variance est $\sigma^2_{p\,min} = 1/C$ .

Dans le plan espérance, écart-type on obtient l'équation :

$$E(R_p) = A/C \pm 1/C \sqrt{(BC-A^2).C(\sigma^2_p - 1/C)}$$

Seule la partie supérieure de cette hyperbole définit la frontière efficiente car le taux de rentabilité des portefeuilles recherchés doit être supérieur à $E(R_{p\,min})$ .

## I I I – Caractérisation des portefeuilles moyenne-variance efficients

On sait que la covariance d'un titre avec le rendement d'un portefeuille, mesure sa contribution marginale à la variance du portefeuille. En effet , pour $E(R_p)$ donné :

$$x_k = \frac{E(R_p)}{BC-A^2} . \sum_j \nu_{kj} (C. E(R_j) - A) + \sum_j \nu_{kj} (B - A. E(R_j)) \qquad k = 1,...,n$$

$$\Rightarrow \qquad Cov(R_i, R_p) = \sum_j x_j \sigma_{ij} = \alpha_1 E(R_i) + \alpha_2 \qquad i = 1,...,n$$

avec $\alpha_1 = \frac{(C. E(R_p) - A)}{BC-A^2} \geq 0$ et $\alpha_2 = \frac{(B - A. E(R_p))}{BC-A^2}$

La contribution marginale de chacun des titres au risque du portefeuille doit être une Fonction linéaire positive de son espérance de rentabilité pour obtenir de l'efficience du portefeuille.

ou encore [1] :

$$\Rightarrow \qquad E(R_i) = \theta_1 + \theta_2 \; Cov(R_i, R_p)$$

avec $\theta_1 = \frac{A\, E(R_p) - B}{C. E(R_p) - A}$ et $\theta_2 = \frac{D}{C. E(R_p) - A} > 0$

On pose $\theta_1 = R_0$ : taux de rentabilité d'un actif sans risque s'il y en a un .

On obtient la formulation courante de la relation linéaire positive qui existe entre l'espérance de rentabilité d'un titre et sa contribution marginale au risque d'un portefeuille efficient :

$$E(R_i) = R_0 + \frac{E(R_p) - R_0}{var(R_p)} Cov(R_i, R_p) \qquad \text{avec } E(R_p) - R_0 > 0$$

[1] Démonstration : Briys E. et Viala P. -1995- Elements de théorie financière - Nathan

Si on se place dans le plan $E(R_i)$,$Cov(R_i, R_p)$ ,
chacun des titres doit être situé sur une même droite dont l'ordonnée à l'origine est $R_0$ et dont la pente est strictement positive et égale à :

$$\frac{E(R_p) - R_0}{\sigma^2 (R_p)}$$

## IV - Formulation de Sharpe [1] :

Sharpe a étudié les travaux de Markowitz et a travaillé sur la possibilité de simplifier les calculs de façon à développer l'utilisation pratique de ce modèle. Le temps nécessaire au calcul de la matrice complète des corrélations était un obstacle à la mise en œuvre du modèle. Sharpe a donc postulé que les rentabilités des actifs étaient constitués d'un facteur commun à tous les actifs et d'une composante propre à chaque titre . Les études ont montré que le meilleur facteur explicatif était la rentabilité du marché dans son ensemble.
Ce modèle est appelé modèle empirique de marché ou modèle à un seul indice de Sharpe.
**Il n'a pas de fondement théorique .** Contrairement au MEDAF ce modèle ne contient pas de notion d'équilibre et ne fait pas d'hypothèses particulières sur le marché et les investisseurs.
Le calcul de la matrice des corrélations reste difficile ( même avec le matériel d'aujourd'hui ).
L'hypothèse de ce modèle empirique estdonc que les rentabilités possèdent un facteur commun : $R_M$ , indice de marché.
Les variations de rentabilité des actifs dépendent linéairement de facteurs communs :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

$\varepsilon_i$ désigne la rentabilité spécifique de l'actif i , non corrélée avec le marché.
$\alpha_i$ et $\beta_i$ s'obtiennnent par régression linéaire des rendements du marché sur les rendements d'un actif par la méthode des moindres carrés ordinaire.
$R_M$ taux rentabilité du portefeuille de marché

$\beta_i$ = Le coefficient bêta mesure la quantité de risque

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{\operatorname{var}(R_M)}$$

[1] Sharpe W.F. -janvier 1963- A simplified model for portfolio analysis - Management science

Le risque total d'un actif est : $\text{var}(R_i) = \beta^2_i \,\text{var}(R_M) + \text{var}(\varepsilon_i)$

Celui d'un portefeuille est : $\text{var}(R_p) = \beta^2_p \,\text{var}(R_M) + \underbrace{1/n^2 \sum_i \text{var}(\varepsilon_i)}_{\approx 0}$

Le risque d'un portefeuille bien diversifié est donc celui du marché et :
$\text{cov}(R_i,R_j) = \sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\,\sigma^2_M$ si $i \neq j$ car $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

Indépendemment de tout principe d'équilibre, on considère que le "portefeuille de marché" est une combinaison convexe des portefeuille moyenne-variance-efficients individuels .

## V – Modèle d'Equilibre Des Actifs Financiers

Le MEDAF repose sur davantage d'hypothèses que le modèle initial de Sharpe.
Le développement de ce modèle a nécessité un certain nombre d'hypothèses.
Il s'agit d'une part des hypothèses du modèle de markowitz, et d'autre part des hypothèses nécessaires à l'équilibre du marché :

-Les investisseurs sont averses au risque et maximisent leur espérance d'utilité de leur richesse en fin de période.
- Les investisseurs ne considérent que la moyenne et la variance de la distribution de rendements.
- Ils n'ont qu'une seule période d'investissement commune.
- L'information est simultanée et gratuite, ils peuvent ainsi faire les mêmes prévisions d'espérance pour tous les actifs.
- Ils peuvent prêter et emprunter sans limitation au taux sans risque
- Les marchés sont parfaits ( pas de taxes et actifs divisibles à l'infini)

A l'équilibre du marché avec un actif sans risque de taux $R_0$,
la frontière efficiente commune à tous les investisseurs devient la droite d'équation :

$$E(R_p) = R_0 + \frac{E(R_M) - R_0}{\sigma_M} \,.\, \sigma_p \qquad \textit{Capital market line}$$

$$E(R_M) - R_0 > 0$$

On avait aussi :

$$E(R_i) = R_0 + \frac{E(R_p) - R_0}{\text{var}(R_p)} \,\text{Cov}(R_i, R_p) \qquad \text{avec } E(R_p) - R_0 > 0$$

En considérant le portefeuille de marché comme efficient et $\beta$ le risque systématique ou non diversifiable , rémunéré par le marché.

$\Rightarrow$ $E(R_i) = R_0 + \beta_i (E(R_M) - R_0)$ $E(R_M) - R_0 > 0$ est le prix du risque
C'est la forme de base du MEDAF développée également par
Lintner (1965) et Mossin (1968).

La droite ainsi définie est désignée par *security market line* dans le*icing Model* (CPAM=MEDAF en anglais) . A l'équilibre, tous les actifs sont situés sur cette droite.

## Section III – Le ratio de Sharpe

C'est le rapport entre l'espérance d'une prime de risque et le degré de risque du portefeuille.

$$S_P = \frac{E(R_P - R_0)}{\sigma(R_P)}$$

$\sigma(R_P)$ : écart-type des rendements du portefeuille P
$E(R_P)$ : espérance des rendements du portefeuille P
A l'équilibre $S_P$ = pente de *Capital market line*
$\sigma(R_P)$ doit rester constant jusqu'à la fin de la période .

Le gérant compare donc son ratio de Sharpe avec l'indice du marché, pour connaître la rémunération du risque qu'il prend. Mais cette mesure contenant le risque non systématique, elle n'est pas adaptée aux portefeuilles diversifiés.

Pour des distributions asymétriques de rendement non plus, puisqu'il n'interpréte pas les écarts négatifs à la moyenne. Dans ce cas , il est préférable de remplacer le taux sans risque par la rentabilité minimale acceptable, et de calculer l'écart-type seulement pour les déviations négatives. On obtient alors le Ratio de Sortino :

$$\frac{E(R_P) - R_{min}}{\sqrt{(1/T) \sum_{\substack{t=0,T \\ R_{Pt} < R_{min}}} (R_{Pt} - R_{min})^2}}$$

Sortino F.A. et Price L.N. -1994- Performance measurement in a downside risk framework - journal of investing , 59-64

## I – Les problèmes posés par le ration de Sharpe en gestion alternative :

### A Les problèmes de données

Le ratio de Sharpe est trés utilisé pour mesurer la performance des *hedge funds* .
Or, la marge d'erreur des bases de données d'historiques de rendements est importante [1]:

- à cause des faillites non répercutées (*survivor bias*)
- à cause des fonds *start-up* n'inscrivant leurs résultats que s'ils sont bons ( *backfil bias* ),
  et des approximations et retards dans l'évaluation des actifs non-liquides

(*marking-to-market*) pouvant provoquer par autocorrélation, une sous-estimation du risque de 30% à 40% .

### B Les problèmes en modèlisation statique :

→ Pour la modèlisation discrète, on peut écrire [2] , si $R_0 = 0$ et le marché complet.

$$S = \frac{E(R_p)}{\sigma(R_p)} = \frac{\sum_i p_i r_i}{[\sum_i p_i r^2_i - (\sum_i p_i r_i)^2]^{½}}$$

$p_i$ : probabilité de réalisation du rendement $r_i$ sur la période.
$\sum_i p_i r_i \geq 0$ par hypothèse .

On définit le Lagrangien afin de minimiser $\sum_i p_i r^2_i$
sous la contrainte: $E(R_p) = \sum_i p_i r_i$
et l'espérance de rendement = 0 sous la probabilité risque-neutre $q_i$ ( $\sum_i q_i r_i$ ):

$$L = ½ \sum_i p_i r^2_i + \mu ( E(R_p) - \sum_i p_i r_i ) + \gamma \sum_i q_i r_i$$

$$\underset{r_i \gamma \mu}{\text{Min}} \ L \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta r_i} = \frac{\delta L}{\delta \gamma} = \frac{\delta L}{\delta \mu} = 0 \qquad \Rightarrow r_i^* = \mu - \gamma \ q_i/p_i$$

On peut alors trouver un portefeuille maximisant le ratio de Sharpe en resolvant ce système de conditions : $S_{max} = [\sum_i p_i (q_i/p_i)^2 - 1]^{½}$

---

[1] Amin G. et Kat H. - 2003 - Welcome to the dark side : hedge fund attrition and survivor bias 1994/2001 - journal of alternative investments, Summer p57-73

[2] W.Goetzmann, J.Ingersoll, M. Spiegel, I. Welch - Fev 2002- Sharpening Sharpe ratios - Yale school of management - working paper

→ Pour un modèle de distribution continu :

$$S_{max} = \int q^2(r)/\, p(r)\, dr - 1 = E\,[q^2(r)/\, p^2(r)] - 1$$

Donc,on trouve que le portefeuille maximisant le ratio de Sharpe dans un marché complet au sens Arrow-Debreu, possède la distribution discrète de rendements :

$$r_i{}^* = E\,(R_p) + \frac{E\,(R_p)\,(1 - q_i/p_i)}{S^2_{max}}$$

Ces rendements sont donc des déviations par rapport à la moyenne espérée.
Ils sont obtenus en s'éloignant du risque neutre, rendant la distribution asymétrique, augmentant donc le ratio de Sharpe par une prise de risque plus importante.

On peut aussi améliorer le coefficient bêta de mesure du risque
car:

$$\mathrm{cov}\,(R^*_p, R_M) = E\,[(R^*_p - E\,(R_p)).R_M)]$$

$$= \sum_i p_i\,[-R_{Mi}\,\frac{E\,(R_p)}{S^2_{max}}(q_i/p_i - 1)] = \frac{E\,(R_p)}{S^2_{max}}\sum_i (p_i - q_i)\, R_{Mi}$$

$$= \frac{E\,(\bar{R}_p)}{S^2_{max}}\, R_M$$

Comme :

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}\,(R_p^*, R_M)}{\mathrm{var}\,(R_M)}$$

donc:

$$\beta = \frac{[E\,(R_p)/\,\bar{R}_M]\,.\,(S_{RM})^2}{(S_{max})^2}$$

avec $S_{RM}$ : Ratio de Sharpe du portefeuille de marché

L'augmentation du ratio de Sharpe est donc obtenue par de simples produits dérivés.

La stratégie élémentaire étant de vendre des options "hors de la monnaie",

et d'accumuler les primes.

### C Les problèmes de modèlisation en temps continu

Pour simplifier, on modèlise le prix d'un seul fond par Black&Scholes :

$$dP/P = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

$\sigma$ : coefficient de dispersion ou volatilité = supposé constant

$\mu$ : espérance de rendement instantané

r : taux sans risque

- Le ratio de Sharpe instantané du fond sous-jacent est :

$$S_{\text{instantané}} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

pour une période unité .

- Sur l'intervalle de temps [0,t] , on a:

$$S_{\text{instantané } 0 \to t} = \frac{\mu t - rt}{\sigma t^{1/2}} = S_{\text{instantané}} \sqrt{t}$$

- En supposant $\mu - r$ constant sur l'intervalle de temps [0,t] , on peut reprendre la définition du ratio de Sharpe $S_{\text{discret}}$ avec:

$$E\ (R_p) = \int_0^t r\, ds + [(\mu - r) - \tfrac{1}{2}\sigma^2]\,.\,t$$

et $$\text{var}\,(R_p) = \sigma^2\, t$$

d'où $$S_{\text{discret } 0 \to t} = \frac{[(\mu - r) - \frac{1}{2}\sigma^2]\,.\,t}{\sigma\, t^{1/2}} = \frac{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}\sqrt{t} = S_{\text{discret}}\sqrt{t}$$

par suite : $$S_{\text{instantané}} - S_{\text{discret}} = \tfrac{1}{2}\sigma$$

et $$(S_{\text{instantané } 0 \to t} - S_{\text{discret } 0 \to t})/S_{\text{instantané } 0 \to t} = (S_{\text{instantané}} - S_{\text{discret}})/S_{\text{discret}}$$

Les stratégies de gestion de portefeuilles consistent à répartir continuellement la richesse, entre l'actif sans risque et les fonds risqués, en réponse aux dernières informations.

$S_{instantané}\sqrt{t}$ et $S_{discret}\sqrt{t}$ donnent un classement des fonds qui ne tient pas compte de la fréquence des mesures, ni de l'écart relatif entre les deux .
Alors que les problèmes d'erreurs sur l'estimation du ratio de Sharpe viennent justement de la précision des données, on ne peut l'améliorer par une mesure instantanée .
On voit que le ratio de Sharpe ($S_{discret}$ ) défavorise les gérants prudents par rapport à ceux qui prennent des risques en terme de volatilité et ne prend pas en compte les réallocations d'actifs prudentes ou risquées sur la période de mesure, à moins d'un échec de la stratégie.

## Section IV : Autres types de mesures

Les propriétés statistiques des ratios de Sharpe dépendent donc intimement de celles des distributions de rendements sur lesquelle il s'appuie .
Par exemple, il serait naïf de vouloir comparer les ratios de Sharpe d'un *hedge fund*, et d'un *mutual fund*, sans incorporer une composante relative au type de gestion.
La mise en évidence de son évaluation approximative du risque, pouvant entrainer des erreurs substantielles, passe avant le problème de la cohérence.

### I - Cohérence d'une mesure de risque ρ [1]

x , y : vecteurs de payoffs de 2 portefeuilles

① $\rho ( x + y ) \leq \rho ( x ) + \rho ( y )$ sous-additivité
L'agrégation diminue les risques .

② $\rho( \lambda.x ) = \lambda\rho(x )$ homogénéité $\lambda > 0$
Le risque est proportionnel à la taille de la position

donc: $z = \lambda.x + (1-\lambda).y \Rightarrow \rho(z) \leq \lambda\, \rho(x) + (1-\lambda)\rho(y)$
Evalue les bénéfices d'une diversification .

③ $x \leq y \Rightarrow \rho( y ) \leq \rho(x)$

④ $\rho ( x + \lambda(1+r)) = \rho ( x) - \lambda$ r taux sans risque.
L'ajout d'un actif non risqué diminue le risque du portefeuille.

[1] Delbaen F. - 1998 - Coherent risk measures on general probability spaces - working paper - ETH Zürich - www.math.ethz.ch/~delbaen/

## I I - La Value-at-risk

La value at risk mesure le risque d'un portefeuille comme le montant maximum de la perte qu'il peut subir pour un seuil de confiance fixé:

### A Définitions :

VaR (X) = Montant de perte que l'on ne dépassera pas avec une probabilité au moins $\alpha$ . Le choix de 1-$\alpha$ est également possible car si $\alpha$ correspond au quantile de 1%, la probabilité d'éviter la catastrophe est nécessairement 1-$\alpha$ .

Les critiques principales sur la value-at-risk sont :

→ qu'elle n'est pas sous-additive (contre-exemple [1]) ;
elle ne prend pas en compte les effets de la diversification.

Dans une banque, cela signifie qu'il est possible de réduire ses besoins de capitaux en la divisant en parts, ou que le manager d'un sous-portefeuille n'est jamais concerné par la diversification du portefeuille global .

→ qu'elle ne donne pas l'ampleur des pertes si la catastrophe prévue arrive.

On ne peut raisonnablement pas la considèrer comme une mesure de risque.

Définition du $\alpha$-quantile de R :

$$q_\alpha (R) = \inf \{ r \in \mathbb{R} / P ( R \leq r) \geq \alpha \}$$

Définition de la valeur à risque absolue de niveau $\alpha$ de R :

$$VaR_\alpha = q_\alpha (-R) = - q_{1-\alpha} (R)$$

Définition de la valeur à risque moyenne de niveau $\alpha$ de R :

$$VaR_{\alpha \text{ moyenne}} = E(R) + VaR_\alpha$$

---

[1] Tashe Dirk, Deutsche Bundesbank - Octobre 2002 - Expected shortfall and beyond - working paper

## B Méthodes de calcul de la VaR d'un portefeuille :

### a Méthode de calcul analytique ou probabiliste :

Rentabilité du portefeuille comportant n facteurs de risque , jusqu'à la date T :

$$R_{pT} = \lambda'_T \, . \, X$$

$\lambda'_T$ : vecteur de sensabilité de la rentabilité du portefeuille p.
X : vecteur des facteurs de risque à répartition normale. ( principaux indices de marché )

Si $\sum$ est la matrice de variance-covariance :

$$R_{pT} = \sqrt{\lambda'_T \, . \, X \, . \, \lambda_T} \, . \, N(0,1)$$

Si $V_0$ : valeur initiale du portefeuille :

$$P( V_0 \, R_{pT} \geq q_{1-\alpha} \, (R_{pT})) = 1-\alpha \quad = \; 95 \text{ à } 99 \; \%$$

soit :

$$VaR_\alpha = \; - \sqrt{\lambda'_T \, . \, X \, . \, \lambda_T} \;\; V_0 \;\; N^{-1} \, (Q) \qquad N^{-1} \text{ inverse de } N(0,1)$$

Cette méthode est utilisée par JP Morgan dans Riskmetrics [1].

### b Méthode de calcul historique ou non paramètrique

Dans le cas de rendements non-normaux , on utilise les chiffres des 5 dernières années, afin de prévoir le futur. (Intuitif et sans calculs)

[1] Riskmetrics Group, 44 Wall Street, New York 10005 , ☎ (212) 981.7453

**c Méthode de Monte-Carlo:**

C'est une méthode numérique probabiliste issue de la simulation des diffusions de protons dans les matériaux fissibles en recherche nucléaire .

Il s'agit de l'utiliser pour le calcul de l'intégrale de la distribution de rendements.

On définit un scénario économique par des échantillons ( $r_1, r_2, \ldots, r_n$) indépendants de même loi , ramenés par un changement de variable affine à X : ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)
pour construire une approximation de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 R(x)\, dx = E\,(R(x))$$

$$\hat{I}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1/n \sum_k R(x_k) \quad \text{converge p.s. vers I, quand} \quad n \to \infty$$

Par le théorème central limite : $\dfrac{\hat{I} - E(\hat{I})}{\sigma(\hat{I})} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

Donc $\hat{I} : \; N\,(E\,(\hat{I}), \sigma^2(\hat{I}))$ avec $E(\hat{I}) = I$

et comme les $x_k$ sont indépendants,

$$\sigma^2(\hat{I}) = \frac{\text{var}\,[R(X)]}{n} = \frac{1}{n}\,(E[R^2(X)] - E^2[R(X)]) = \int_0^1 R^2(x)\, dx - I^2$$

<u>Efficacité de cette méthode</u>:

$$P\,[\,|\hat{I} - I| \leq \beta\,] = P\left[\,\frac{|\hat{I} - I|}{\sigma(\hat{I})} \leq \frac{\beta}{\sigma(\hat{I})}\,\right] \approx 2\int_0^{\beta/\sigma(\hat{I})} 1/\sqrt{2\pi}\; e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Pour avoir un degré de confiance de 95% on prend $\dfrac{\beta}{\sigma(\hat{I})} = 2$

Si $\sigma$ correspond à l'échantillon $\Rightarrow \dfrac{\beta\sqrt{n}}{\sigma} = 2 \quad \Rightarrow \quad n = 4\,\dfrac{\sigma^2}{\beta^2}$

Cette relation montre que la lenteur de la convergence, et le nombre important d'instruments financiers peuvent rendre très couteuse l'évaluation du portefeuille.

Pendant le temps de simulation qui peut être de 15 jours, la réévaluation d'un portefeuille doit être recalculée à chaque modification des risques, afin que la VaR corresponde bien au seuil de confiance choisi.

Accélération du calcul :

En s'approchant du modèle réel par des variables aléatoires adaptées au portefeuille, dont la loi n'est plus uniforme sur [0,1].

En modélisant les facteurs de risque par des fonctions quadratiques ( approximation delta-gamma) afin d'optimiser les techniques de réduction la variance $\sigma$. [1]

## III - L'expected Shortfall

Après Delbaen (1998), il s'agissait de trouver une mesure cohérente majorant la $VaR_\alpha$ . afin d'évaluer la perte au delà de la $VaR_\alpha$ .

$$VaR_\alpha (X) = q_\alpha(-X)$$

Si $\alpha$ est la probabilité minimum de ne pas dépasser la $VaR_\alpha$ .

Pour des variables aléatoires X, continues on obtient la définition : *tail conditional expectations* ou t*ail value at risk* :

$$TCE_\alpha = E [ -X / - X \leq VaR_\alpha (X)]$$

mais en général , ces mesures ne sont pas sub-additives.

**L'Expected Shortfall de niveau $\alpha$:**

$$ES_\alpha (R) = - (1-\alpha)^{-1} ( E[ R 1_{\{ -R \leq q_{\alpha(-R)} \}} ] + [q_\alpha (-R)](\alpha - P [-R \leq q_\alpha (-R)]) )$$

$TM_\alpha(R) = - ES_\alpha (R)$ : *$\alpha$-tail mean*

**L'Expected Shortfall de niveau 1-$\alpha$:**

$$ES_\beta (R) = \alpha^{-1} ( E[ R 1_{\{ R \leq q_{\alpha(}\}} ] + [q_\alpha (R)](\alpha - P [R \leq q_\alpha (R)]) )$$

Ces mesures de risque répondent aux critères de cohérence [2].

Elles existent dans de nombreuses variantes :

worst conditional expectations, conditional value-at-risk, sont équivalentes lorsque les distributions de pertes sont continues.

---

[1] Glasserman P. - Heidelberger P. - Shahabuddin P. - 2000 - Variance reduction techniques for estimating Value-at-risk - Management Science - vol 46, p 1349-1364

[2] Acerbi C. et Tasche D. - Avril 2002 - On the coherence of expected shortfall - Working paper ,www.gloriamundi.org

L'ES est alors la solution du problème d'optimisation de la VaR.
On a aussi : $ES_\alpha(R) = \int_\alpha^1 VaR_u \, du$
Si $R_1$ et $R_2$ sont intégrables, on peut majorer le risque de $R_1 + R_2$ par $ES_\alpha(R_1) + ES_\alpha(R_2)$ .

## I V – Le drawdown

C'est le pourcentage de pertes cumulées dues à des baisses successives sur des intervalles de temps variables:
Le Log des rendements quotidiens étant défini par :
$r_t = 100 \times ( \text{Log } P_t - \text{Log } P_{t-1} )$
avec $P_t$ : prix de l'investissement à la date t
On définit sur une période de N jours ouvrés de extremums locaux:

$X_i = 100 \times ( \text{Log } P_{tmin} - \text{Log } P_{tmax} )$ : drawdown $i \in [1,T]$
avec

$P_{tmax}$ : maximum local $> P_{tmax+1} \geq ... \geq P_{tmin}$ minimum local ,

ainsi qu'un maximum sur la période considérée :

$MD = \min (X_i)$ : drawdown maximum sur N jours ( $T<N$)

### A Le Maximun drawdown

Le Maximum Drawdown-at-risk ($MDaR_\alpha$) comme la $VaR_\alpha$, est un quantile de la distribution des maximum de drawdown.

Il mesure le maximum possible de pertes cumulées pour un investissement sur un période et doit être considéré comme une approche complémentaire dans l'évaluation des fluctuations de prix.
Il correspond à des données fortement corrélées, des chutes successives étant subordonnées à l'existence de processus de dépendance locale.[1]

---

[1] Mandelbrot B. et Taylor H. - 1967 - On the distribution of stock price differences - Operation Research 15, 1057-1062

Mandelbrot B - 1997 - Fractals and scaling in finance - Springer Verlag N.Y.

## B Modèlisation

Soit $(X_i)_{i=1,T}$ des observations de la variable aléatoire X (drawdown).
La modèlisation de la fonction de répartition $F_X$ a été faite par Mendes et Brandi [1] en utilisant une distribution de Pareto généralisé modifié (MGPD),

Cette modèlisation a été introduite par Anderson et Dancy (92) :[2]

$$G_\xi (m) = 1- (1 + \xi\, m^\gamma/\psi)^{-1/\xi} \quad \text{si } \xi \neq 0$$
$$\text{et } G_\xi (m) = 1- \exp( -m^\gamma/\psi) \quad \text{si } \xi = 0$$

Où :
$\gamma$ est le paramètre
( si $\gamma > 1$ : concavité; si $\gamma < 1$ : décroissance stricte et épaisseur de queue)
m représente les données .
Le calibrage est obtenu en optimisant les préférences.

## C Applications

En utilisant : $MDaR_\alpha (P) = F^{-1}_X (1-\alpha)$
Si on a 2 portefeuilles, on obtient la sub-additivité : [3]

$MDaR_\alpha (P_1+ P_2) < MDaR_\alpha (P_1) + MDaR_\alpha (P_2)$ ,

Le $MDaR_\alpha$ vérifiant aussi les autres critères c'est une mesure cohérente.
Cette mesure de risque peut alors être utilisée en sélection de portefeuilles.
Le problème est d'identifier les corrélations avec le marché.
Les drawdowns extrêmes surviennent particulièrement avec les pics de volatilité .
Pour le Nasdaq on atteint -28,5% et -29,2% lors des crises d'Octobre 1997 et d' Avril 2000. Il y a aussi un effet de contagion lors de crises globales, le FTSE atteignant un drawdown de - 28,2% en Octobre 1987.

---

[1] Mendes B.V.M. et Brandi W. - 2003 - Modeling drawdown and drawup in financials markets - Forthcoming, Journal of Risk

[2] Anderson C. et Dancy G.P. -1992- The severity of extreme events -Research report 92/593 - Department of probability and statistic, University of Sheffield

[3] Embrechts P. , Mc Neil A., Strauman D. -1999- Correlation: Pitfal and alternatives - RISK 69-71

**Conclusion du premier chapitre :**

Les techniques de mesure de performances décrites au cours de ce chapitre , reposent sur deux hypothèses qui sous-tendent aussi le MEDAF, modèle sur lequel se fondent les mesures de performance traditionnelles. Selon ces hypothèses, d'une part les distributions des rentabilités des fonds sont normales, et d'autre part les bêtas des portefeuilles sont stables ( ce qui est aussi l'une des hypothèses du modèle général linéaire).

Ces hypothèse ne son pas vraies avec les méthodes de gestion actives, et *a fortiori* celles de gestion alternative. Pour pallier aux insuffisances du MEDAF constatées au cours de ces dernières années, nombre de méthodes spécifiques, pas toujours aisées à mettre en œuvre ont été proposées . On citera les plus significatives d'entre elles :

- Les mesures ne prenant en compte que le risque de perdre à la Sortino [1] (*downside risk*)
- Le modèle Grinblatt et Titman [2]
- Les mesures à la Harvey et Siddique s'appliquant aux distributions asymétriques [3]
- Les estimations conditionnelles tenant compte de la variation temporelle des bêtas [4] .

On sait depuis les travaux de Sharpe que le classement des performances des fonds ne présente aucune stabilité au cours du temps, autrement dit, que les performances passées n'ont aucune valeur prédictive. Les résultats les plus surprenants ont été publiés en 1985 par de Bondt et Thaler [5]. Ces auteurs ont montré que des portefeuilles constitués de titres qui avaient dans le passé réalisé de mauvaises performances ( *losers* ) battaient , sur les cinq années suivantes , des portefeuilles constitués par les titres ayant obtenu les meilleures performances ( *winners* ) . Il existe donc à court terme une sur-réaction des marchés (pessimisme pour les premiers, optimisme pour les seconds ) .

Ces études, en élargissant l'usage des mesures de performance, affinant les techniques mises en œuvre dans les années 60, ont donc soulevé des problèmes qui n'avaient pas été identifiés auparavant.

---

[1] Sortino F. et Price F. - 1994 - Performance measurement in a downside risk framework
- Journal of investing, Fall 59-64

[2] Grimblat M. et Titman S.- 1993 - Performance measurement without benchmarks: an examination of mutual funds returns
- Journal of finance and quantitative analysis, 29, 419-444

[3] Harvey C. et Siddique A. - 2000 - Conditional skewness in asset pricing tests -
- Journal of finance 55, 1263-1295

[4] Ferson W. et Schadt R. - 1996 - Measuring fund strategy and performance in changing economic conditions
- Journal of finance 51, 425-462

[5] De Bondt W. et Thaler R.-1985- Does the stockmarket overreact ?
- Journal of finance - 05 , 793

On a vu qu' il est facile à un gérant de *hedge fund* de manipuler le ratio de Sharpe en sa faveur, sans pour autant manifester le moindre talent de gestion et, *a contrario* qu'une stratégie exigeant des capacités de prévision parfaites, donc même impossible à réaliser humainement, peut se voir attribuer un ratio de Sharpe médiocre.
Ce dernier est non seulement trompeur, mais potentiellement dangereux, car utilisé en gestion de risques.

Une conséquence fondamentale du caractère asymétrique des distributions de rentabilité, est que le MEDAF traditionnel devient en général invalide, et avec lui les mesures de performances qui reposent sur le paradigme moyenne-variance.

Dans la mesure où les distributions de rentabilité ne sont pas gaussiennes et les fonctions d'utilités ne sont pas quadratiques, les investisseurs valorisent l'asymétrie.
Comme le marché rémunère l'asymétrie positive, il suffit d'en vendre pour améliorer la rentabilité de son portefeuille au sens moyenne-variance, c'est à dire d'accepter une asymétrie négative en échange d'une espérance plus élevée ou d'une variance plus faible.

Dans un article important Leland (1999) montre que le portefeuille de marché est inefficient (au sens Markowitz), il en découle que les mesures de performances dérivées du MEDAF ne mesurent pas du tout la réelle capacité des gestionnaires à sur-performer le marché. Pour y remèdier, beaucoup d'approches économètriques ont été tentées :
- Comparaison à un indice de gestion alternative [3] :
Problème : comment définir un bencmark significatif

- Affichage de la décorrélation :
Problème : approche trop restrictive, validité des données historiques

- Application de l'analyse de style :
Problème : opacité des fonds.

---

[1] Brooks C. et Kat H. - 2001 - The statistical properties of hedge fund index returns and their implications for investors - University of reading, ISMA, working paper

[2] Leland H. - 1999 - Beyond mean-variance : performance measurement in a nonsymmetrical world - Financial analysts journal, January-february

[3] Lhabitant F. - 2001 - Hedge funds investing: A quantitative look inside the box - The CAPCO Institute journal of financial transformation 68-70

## Annexe :

**Les moments et cumulants :**

La fonction caractéristique caractérisant la loi de probalité d'une variable , est un outil de calcul des moments. En particulier pour le calcul de l'espérance mathématique et de la variance .

On pourrait démontrer que si X est une variable aléatoire telle que $E(X^n)$ existe alors :

$$\varphi_X(u) = \sum_{k\geq 0} \frac{(iu)^k}{k!} m_k \qquad m_k = E(X^k) \text{ est le moment d'ordre k de X}$$

On s'intéresse aussi à la détermination principale du logarithme de la fonction caractéristique qu'on appelle seconde fonction caractéristique.

Avec les mêmes hypothèses que précédemment , cette fonction

$\psi_X(u) = \text{Log}\,[\varphi_X(u)]$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro:

$$\psi_X(u) = \sum_{k\geq 1} \frac{(iu)^k}{k!} cum_k \qquad cum_k \text{ est le cumulant d'ordre k de X}$$

La variable aléatoire X: $N(m, \sigma^2)$ admet pour fonction caractéristique :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 u^2)}$$

Ainsi $cum_1 = m$ $cum_2 = \sigma^2$ et $cum_k = 0$ $\forall k > 2$ le développement limité étant réduit à ses 2 premiers termes.

La variable aléatoire normalisée $X_r$ : $N(0, 1)$ admet pour fonction caractéristique :

$$\varphi_{X_r}(u) = e^{-\frac{1}{2} u^2}$$

Par suite les espèrances mathématiques $E(X_r^k)$ existent $\forall$ k puisque :

$$\varphi_{X_r}(u) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} u^{2n}$$

$$E(X_r^k) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \text{ pour } k = 2n, \qquad E(X_r^k) = 0 \text{ si k est impair}$$

De même la variable aléatoire centrée $X_c$ : $N(0,\sigma^2)$ admet pour fonction caractéristique :

$$\varphi_{X_c}(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$$

$$E(X_c^k) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} \text{ pour } k = 2n, \qquad E(X_c^k) = 0 \text{ si k est impair}$$

En particulier : $E(X_c^4) = 3\sigma^4$

Les moments de la variable aléatoire X: $N(m, \sigma^2)$ peuvent alors se calculer à l'aide de ceux de la variable normalisée associée $X_r$ car $m_k = E[(\sigma X_r + m)^k]$

On a alors :

$$E(X) = m$$
$$E(X^2) = \sigma^2 + m^2$$
$$E(X^3) = 3m\sigma^2 + m^3$$
$$E(X^4) = 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4 \qquad E(X_r^4) = 3$$

On devra faire attention à ne pas confondre les cumulants $cum_k$ avec les moments centrés.

Pour les ordres 3 et 4 on a les relations : $cum_3 = \mu_3$ et $cum_4 = \mu_4 - 3\sigma^4$